DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2015.02.008

双空间指示函数方法在三维分层介质中声波的反散射问题的推广*

刘立汉
（重庆师范大学数学学院，重庆 401331）

摘　要：给出了双空间指示函数方法在三维分层介质中声波的反散射问题的推广。这个方法基于以下观察：当 Green 函数的点源在障碍物内部时，远域数据的赋权积分可以很好地近似估计 Green 函数，但是当 Green 函数的点源在障碍物外部时，远域数据的赋权积分则不能很好地近似估计 Green 函数。建立一个积分方程：它的右边是声源在所重构区域的 Green 函数，则这个积分方程的解的范数在未知障碍物的内部有最值，而这些取得最值的点所围成的区域恰好就是所重构的障碍物区域。这个方法最显著的优势在于它不依赖于未知障碍物的边界条件。

关键词：双空间指示函数方法；分层介质；Green 函数；反散射；Helmholtz 方程
中图分类号：O175　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2015）02－0043－05

Generalized Dual Space Indicator Method for Inverse Scattering of Acoustic Waves in a Stratified Medium

LIU Lihan
（School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China）

Abstract: A generalized dual space indicator method is presented for inverse scattering of acoustic waves in a stratified medium. The method is based on the observation that the weighted integration of the measured scattered field can approximate the Green's function very well when source point of the Green's function is inside the obstacle, but not so well when the source is outside the obstacle. An integral equation whose right-hand side is the Green's function with a source point from a searching region is set up. Then it is known that the norm of the solution of the integral equation has local maximum that lies inside the unknown obstacle, and the region which is surrounded by the local maximal points is exactly the region of obstacle. The most remarkable advantage of this method is that no knowledge of boundary condition is needed.

Key words: generalized dual space indicator method; a stratified medium; Green's function; inverse scattering; Helmholtz equation

对于齐次介质中的反散射问题，Colton 和 Kirsch[1] 给出了一个 LSM 方法：他们需求解出满足如下性质的解

$$\left\| \int_{S^2} u^\infty(\cdot;d_1,d_2,d_3)\,g(d_1,d_2,d_3)\,\mathrm{d}d_1\mathrm{d}d_2\mathrm{d}d_3 - \Phi^\infty(\cdot;\xi_1,\xi_2,\zeta) \right\|_{L^2(S^2)} < \varepsilon \tag{1}$$

其中 ε 是一个小的正常数，u^∞ 是散射场的远域型，

* **收稿日期：**2014－08－03
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11426052）；2013 年重庆高校创新团队建设计划资助项目（KJTD201308）；重庆师范大学基金资助项目（13XLB015）；重庆市教育委员会科学技术研究资助项目（KJ1400522）
作者简介：刘立汉（1987 年生），男；**研究方向：**偏微分方程；E-mail：mathsedu2013@163.com

$S^2 = \{(x_1,x_2,z) \mid x_1^2 + x_2^2 + z^2 = 1\}$ 是单位球，$\Phi^\infty(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{z};\xi_1,\xi_2,\zeta) = \dfrac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\hat{x}_1\cdot\xi_1+\hat{x}_2\cdot\xi_2+\hat{z}\cdot\zeta)}$。他们的方法是基于这个观察：在未知边界附近时，正则解的范数 $\|g\|_{L^2(S^2)}$ 是无界的。最近，LSM 方法得到了大量的研究，并且根据 LSM 方法的想法，也提出了一些定性方法，如因式分解方法[2]，和其它一些方法[3]。Norris[4] 利用远域算子的特征值展开方法考虑了同样的问题，他的方法是基于这个观察：这个级数形式的解的范数在未知障碍物的外部是发散的，而在未知障碍物的内部则是收敛的。

本文考虑在分层介质中的三维 Helmholtz 方程

$$\Delta u(x_1,x_2,z) + k^2 n^2(z) u(x_1,x_2,z) = f(x_1,x_2,z),\quad (x_1,x_2,z) \in \mathbf{R}^3 \tag{2}$$

其中

$$n(z) = \begin{cases} n_+, & z > h_2 \\ n_o(z), & -h_1 < z < h_2 \\ n_-, & z < -h_1 \end{cases} \tag{3}$$

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是拉普拉斯算子，$k > 0$ 是波数，函数 $n_o(z) \in L^\infty(\mathbf{R})$，函数 $n(z)$ 是折射率，函数 $f(x_1,x_2,z)$ 是点源项，且 n_+, n_-, h_1, h_2 都是正常数和函数 $u(x_1,x_2,z)$ 是时间调和的声音速率势能。我们的工作主要是由在分层介质中的声波的研究所引起的[5-10]。在分层介质中，声波受声管的影响而导致水平传播[11-14]。

根据文献［15－17］，我们将利用如下记号。在不同的坐标系下，三维空间 R^3 中的一个点分别记为

$$P = (x_1,x_2,z) \sim (r,\theta,z) \sim (R,\theta,\varphi),$$
$$P' = (\xi_1,\xi_2,\zeta) \sim (r',\theta',\zeta) \sim (\rho,\theta',\varphi')$$

它们有如下关系：

$$R^2 = r^2 + z^2 = x_1^2 + x_2^2 + z^2 = |P|^2,$$
$$r = R\sin\varphi, z = R\cos\varphi, x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta,$$
$$\rho^2 = r'^2 + \zeta^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \zeta^2 = |P'|^2,$$
$$r' = \rho\sin\varphi', \zeta = \rho\cos\varphi', \xi_1 = r'\cos\theta', \xi_2 = r'\sin\theta'$$

现在引入常微分方程

$$q''(z) + k^2[n^2(z) - a^2]q(z) = 0,\ -\infty < z < \infty \tag{4}$$

的特征值和特征函数。在条件（3）下，可得出[13,18]：

1）这个方程仅有有限个特征值，并且它们都是单重的；设函数 $\varphi_j(z)(j = 1,2,\cdots,N)$ 为方程（4）的规范化的特征函数和 $a_j(j = 1,2,\cdots,N)$ 为其对应的特征值。

2）$|a_j| > n_* = \max\{n_+, n_-\}$，并且函数 $\varphi_j(z)(j = 1,2,\cdots,N)$ 有如下渐近性质

$$|\varphi_j(z)| \to \mathrm{e}^{-k\sqrt{a_j^2-n_\pm^2}|z|}(j = 1,2,\cdots,N),\text{当 } z \to \pm\infty \tag{5}$$

设函数 $u(x_1,x_2,z)$ 是扰动的三维 Helmholtz 方程（2）的解，我们定义导波 $u_g(x_1,x_2,z)$ 和自由波 $u_f(x_1,x_2,z)$ 如下

$$U_j(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_j(\zeta)u(x_1,x_2,\zeta)\mathrm{d}\zeta\,(j = 1,2,\cdots,N),$$
$$u_j(x_1,x_2,z) = \varphi_j(z)U_j(x_1,x_2)\,(j = 1,2,\cdots,N) \tag{6}$$

$$u_g(x_1,x_2,z) = \sum_{j=1}^{N}\varphi_j(z)U_j(x_1,x_2) = \sum_{j=1}^{N}u_j(x_1,x_2,z) \tag{7}$$

$$u_f(x_1,x_2,z) = u(x_1,x_2,z) - u_g(x_1,x_2,z) \tag{8}$$

如果

$$\frac{\partial u_f}{\partial R} - \mathrm{i}kn(z)u_f = O\left(\frac{1}{R^2}\right), u_f = O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{9}$$

当 $R \to \infty$，$(\theta,\varphi) \in [0,2\pi]\times[0,\pi]$ 一致成立，

和

$$\frac{\partial u_j}{\partial r} - \mathrm{i}ka_ju_j = O\left(\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\right), j = 1,2,\cdots,N \tag{10}$$

当 $r \to \infty$，$\theta \in [0,2\pi]$ 一致成立

那么三维 Helmholtz 方程（2）的解满足推广的 Sommerfeld-Rellich 辐射条件（输出辐射条件）。

本文给出了双空间指示函数方法在三维分层介质中声波的反散射问题的推广。这个方法基于以下观察：当 Green 函数的点源在障碍物内部时，远域数据的赋权积分可以很好地近似估计 Green 函数，但是当 Green 函数的点源在障碍物外部时，远域数据的赋权积分则不能很好地近似估计 Green 函数。我们建立一个积分方程：它的右边是声源在所重构区域的 Green 函数，则这个积分方程的解的范数在未知障碍物的内部有最值，而这些取得最值的点所围成的区域恰好就是所重构的障碍物区域。这个方法最显著的优势在于它不依赖于未知障碍物的边界条件。

1 Green 函数

在分层介质中的满足输出辐射条件（9）和（10）的三维齐次 Helmholtz 方程的 Green 函数和它的渐近性质，更多详细的推导见文［5－7，16－17］。

一个函数 $G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)$ 被称为在分层介质中的三维齐次 Helmholtz 方程的 Green 函数是对

于在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 上的时间调和的声波，其点源在 $P' = (\xi_1, \xi_2, \zeta)$，如果在广义函数的意义下，函数 $G(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta)$ 满足

$$\Delta G + k^2 n^2(z) G = \frac{-1}{4\pi |P - P'|} \delta(|P - P'|) \tag{11}$$

并且满足输出辐射条件（9）和（10），其中 $P = (x_1, x_2, z)$。通过作 Fourier 变换，可以得到 $G(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta)$ 的一个 Hankel 变换表示

$$G(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{q_1(z_<, ka) q_2(z_>, ka)}{W(ka)} \cdot J_0(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) \cdot ka \mathrm{d}(ka) \tag{12}$$

其中 $z_< = \min\{z, \zeta\}$，$z_> = \max\{z, \zeta\}$，J_0 是 0 阶的第一型 Bessel 函数，$q_1(z_<, ka), q_2(z_>, ka)$ 是常微分方程（4）的 Jost 函数，即

$$q_1(z, ka) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sqrt{n_-^2 - a^2}\, z} + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \text{当 } z \to -\infty \tag{13}$$

和

$$q_2(z, ka) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\sqrt{n_+^2 - a^2}\, z} + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \text{当 } z \to +\infty \tag{14}$$

$W(ka)$ 是函数 $q_1(z, ka)$ 和 $q_2(z, ka)$ 的 Wronskian 行列式。

积分（12）是一个反常积分（广义积分），因为对于 $a > n_* = \max\{n_+, n_-\}$，Wronskian 行列式 $W(ka)$ 可能有有限个单重零点[18]。注意到

$$H_0^{(2)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) = -H_0^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2})$$

其中 $H_0^{(l)}(l = 1, 2)$ 是 0 阶的第 l 型 Hankel 函数，并且

$$J_0(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) = \frac{1}{2}\Big[H_0^{(1)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) + H_0^{(2)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2})\Big]$$

（见文［19－21］）。我们可以表示函数 $G(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta)$ 为

$$\begin{aligned}
G(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta) = {} & \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{q_1(z_<, ka) q_2(z_>, ka)}{W(ka)} \cdot \Big[H_0^{(1)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) + H_0^{(2)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2})\Big] \cdot ka \mathrm{d}(ka) = \\
& \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{q_1(z_<, ka) q_2(z_>, ka)}{W(ka)} \cdot \Big[H_0^{(1)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) - H_0^{(1)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2})\Big] ka \mathrm{d}(ka) = \\
& \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{q_1(z_<, ka) q_2(z_>, ka)}{W(ka)} \cdot H_0^{(1)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) \cdot ka \mathrm{d}(ka) + \\
& \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{q_1(z_<, ka) q_2(z_>, ka)}{W(ka)} \cdot H_0^{(1)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) \cdot ka \mathrm{d}(ka) = \\
& \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{q_1(z_<, ka) q_2(z_>, ka)}{W(ka)} \cdot H_0^{(1)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) \cdot ka \mathrm{d}(ka) = \\
& \frac{1}{4\pi}\int_{B'AB} \frac{q_1(z_<, ka) q_2(z_>, ka)}{W(ka)} \cdot H_0^{(1)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) \cdot ka \mathrm{d}(ka) + \\
& \frac{1}{4\pi}\int_C \frac{q_1(z_<, ka) q_2(z_>, ka)}{W(ka)} \cdot H_0^{(1)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) \cdot ka \mathrm{d}(ka) = \\
& \frac{1}{4\pi}\int_{B'AB} \frac{q_1(z_<, ka) q_2(z_>, ka)}{W(ka)} \cdot H_0^{(1)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) \cdot ka \mathrm{d}(ka) + \\
& \sum_{j=1}^N \frac{\mathrm{i}ka_j}{2W'(ka_j)} \varphi_j(z) \varphi_j(\zeta) \cdot H_0^{(1)}(ka_j\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) = \\
& G_f(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta) + G_g(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta) = \\
& G_f(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta) + \sum_{j=1}^N G_j(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta)
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $B'A, AB$ 对于使函数 $q_1(z, ka), q_2(z, ka), W(ka)$ 为 a 的双值函数的那段，并且

$$G_f(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta) = \frac{1}{4\pi}\int_{B'AB} \frac{q_1(z_<, ka) q_2(z_>, ka)}{W(ka)} \cdot H_0^{(1)}(ka\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) \cdot ka \mathrm{d}(ka) \tag{16}$$

$$G_g(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta) = \sum_{j=1}^N \frac{\mathrm{i}ka_j}{2W'(ka_j)} \varphi_j(z) \varphi_j(\zeta) \cdot H_0^{(1)}(ka_j\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}) \tag{17}$$

$$G_j(x_1, x_2, z; \xi_1, \xi_2, \zeta) = \frac{\mathrm{i}ka_j}{2W'(ka_j)} \varphi_j(z) \varphi_j(\zeta) \cdot$$

$$H_0^{(1)}(ka_j\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}),(j=1,2,\cdots,N) \tag{18}$$

在这里，函数 G_f,G_g 分别表示自由波和导波，每一个函数 $G_j(j=1,2,\cdots,N)$ 对应一个单导波模式。

现在，我们给出在后面的讨论中非常有用的一个引理。

引理 1 设函数 $G_f(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta),G_j(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)(j=1,2,\cdots,N)$ 分别是（16）式和（18）式提到的 Green 函数。则对于固定的 ξ_1,ξ_2 和 ζ，有

$$\frac{\partial G_f}{\partial R}-\mathrm{i}kn(z)G_f=O\left(\frac{1}{R^2}\right),G_f=O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{19}$$

当 $R\to\infty,(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$ 一致成立

和

$$\frac{\partial G_j}{\partial r}-\mathrm{i}ka_jG_j=O\left(\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}\right),\ j=1,2,\cdots,N \tag{20}$$

当 $r\to\infty,\theta\in[0,2\pi]$ 一致成立

证明 这个定理的证明类似于文［15］的证明，因此在这省略。

2 双空间指示函数方法在三维分层介质中声波的反散射问题的推广

如果在三维分层介质中声波的反散射，有一个有界的散射体 D。假设这个入射声波来自一条直线点源，这条直线平行于分层轴，我们对这个声波满足何种边界条件不作要求，它可以满足 Dirichlet 边界条件、Neumann 边界条件或阻抗边界条件中的任何一个。在这些假设条件下，那么全部的声波 $u(x_1,x_2,z)$ 满足三维 Helmholtz 方程

$$\Delta u(x_1,x_2,z)+k^2n^2(z)u(x_1,x_2,z)=\delta(x_1-\xi_1,x_2-\xi_2,z-\zeta),\quad \text{对于}(x_1,x_2,z)\in\mathbf{R}^3\setminus\overline{D} \tag{21}$$

其中 $n(z)$ 由（3）式所给定，并且还满足输出辐射条件（9）和（10）。考虑全部的波 $u(x_1,x_2,z)$ 是由入射波 $u^i(x_1,x_2,z)$ 和散射波 $u^s(x_1,x_2,z)$ 组成，即 $u(x_1,x_2,z)=u^s(x_1,x_2,z)+u^i(x_1,x_2,z)$，其中

$$u^i(x_1,x_2,z)=G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta) \tag{22}$$

其中 $G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)$ 由（12）式所给出。由（21）式有

$$\Delta u^s(x_1,x_2,z)+k^2n^2(z)u^s(x_1,x_2,z)=0,\quad \text{对于}(x_1,x_2,z)\in\mathbf{R}^3\setminus\overline{D} \tag{23}$$

并且同样也满足输出辐射条件（9）和（10）。对于每一个给定的点 (ξ_1,ξ_2,ζ)，$u^i(x_1,x_2,z)=G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)$ 是已知的，其中 $G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)$ 由（12）式所给出，并且对任意的边界条件，$u^s(x_1,x_2,z)$ 是可以唯一决定的。

设

$$\Gamma=\{(x_1,x_2,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,z=z_0=\text{常数}\} \tag{24}$$

和

$$\Gamma_s=\{(\xi_1,\xi_2,\zeta)\in\mathbf{R}^3\,|\,\zeta=\zeta_0=\text{常数}\} \tag{25}$$

那么，我们这里考虑的重构问题为：对于任意 $(x_1,x_2,z)\in\Gamma$ 和 $(\xi_1,\xi_2,\zeta)\in\Gamma_s$，给定 $u(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)$，在不知道 u 满足何种边界条件下，我们重构未知障碍物 D。不失一般性，可以假设 $\zeta_0>\max\{\zeta\,|\,(\xi_1,\xi_2,\zeta)\in\overline{D}\}$。

设 Ω 是包含 $\overline{D}$ 的一个区域，则对于任意一个 $(\xi_1,\xi_2,\zeta)\in\Omega,(x_1,x_2,z)\in\Gamma$，考虑如下积分方程

$$\int_{\Gamma_s}u^s(x_1,x_2,z;x_1^s,x_2^s,z^s)g(x_1^s,x_2^s,z^s;\xi_1,\xi_2,\zeta)\cdot \mathrm{d}x_1^s\mathrm{d}x_2^s\mathrm{d}z^s=G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta) \tag{26}$$

其中 $G(x_1,x_2,z;\xi_1,\xi_2,\zeta)$ 由（12）式所给出。

定理 1 （i）如果 $(\xi_1,\xi_2,\zeta)\in\Omega\setminus\overline{D}$，方程（26）无解。

（ii）如果对于给定的 (ξ_1,ξ_2,ζ)，方程（26）有一个解 $g(x_1^s,x_2^s,z^s;\xi_1,\xi_2,\zeta)$，其中 $(x_1^s,x_2^s,z^s)\in\Gamma_s$，并且对于 D，它没有内特征值，那么这个解是唯一的。

（iii）如果对于任意 $(\xi_1,\xi_2,\zeta)\in D$，方程（26）有一个解 $g(x_1^s,x_2^s,z^s;\xi_1,\xi_2,\zeta)$，则

$$\lim_{(\xi_1,\xi_2,\zeta)\to\partial\Omega}\|g(\cdot;\xi_1,\xi_2,\zeta)\|_{L^2(R)}=\infty \tag{27}$$

证明 这个定理的证明类似于文［1］的证明，因此在这省略。

从上述定理可以知道：如果对于 $(\xi_1,\xi_2,\zeta)\in\Omega$，我们可以解方程（26），那么如果 $(\xi_1,\xi_2,\zeta)\notin D$，范数 $g(\cdot;\xi_1,\xi_2,\zeta)$ 不是一个有限的数，而如果 $(\xi_1,\xi_2,\zeta)\in D$，范数 $g(\cdot;\xi_1,\xi_2,\zeta)$ 是一个有限的数，并且方程（26）有一个解。因此，这些取得最值的点所围成的区域恰好就是所重构的障碍物区域。

参考文献：

［1］ COLTON D, KIRSCH A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region［J］. Inverse Problems, 1996, 12: 383－393.

［2］ KIRSCH A, GRINBERG N. The factorization method for inverse problems［M］. Oxford: Oxford University Press, 2008.

[3] POTTAST R. A survey on sampling and probe methods for inverse problems [J]. Inverse Problems, 2006, 22: R1-R47.

[4] NORRIS A. A direct inverse scattering method for imaging obstacles with unknown surface conditions [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1998, 61: 267 – 290.

[5] GILBERT R, XU Y. Dense sets and the projection theorem for acoustic harmonic waves in a homogeneous finite depth ocean [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1990, 12: 69 – 76.

[6] GILBERT R, XU Y. The propagation problem and far-field pattern in a stratified finite-depth ocean [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1990, 12: 199 – 208.

[7] GILBERT R, XU Y. Starting fields and far fields in ocean acoustics [J]. Wave Motion, 1989, 11: 507 – 524.

[8] GILBERT R, XU Y. Generalized Herglotz functions and inverse scattering problem in a finite depth ocean [C]. Invariant Imbedding and Inverse Problems, 1992: 216 – 229.

[9] XU Y. The propagating solutions and far-field patterns for acoustic waves in a finite depth ocean [J]. Applicable Analysis, 1990, 35:129 – 151.

[10] XU Y. An injective far-field pattern operator and inverse scattering problem in a finite depth ocean [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1991, 34: 295 – 311.

[11] BREKHOVSKIKH L. Waves in layered media [M]. New York: Academic Press, 1960.

[12] BUCHANAN J, GILBERT R, WIRGAN A, et al. Marine acoustics: direct and inverse scattering of waves [M]. SIAM: Other Titles in Applied Mathematics, 2004.

[13] WILCOX C. Sound propagation in stratified fluids [M]. New York: Springer-Verlag, 1984.

[14] WEDER R. Spectral and scattering theory for wave propagation in perturbed stratified media [M]. New York: Springer-Verlag, 1981.

[15] LIU L, QIN Y, XU Y, et al. A uniqueness and existence of solutions for the 3 – D Helmholtz equation in a step-index waveguide with unbounded perturbation [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2012, 35: 857 – 868.

[16] XU Y. Scattering of acoustic waves by an obstacle in a stratified medium [J]. Partial differential equations with real analysis, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 1992, 263:147 – 168.

[17] XU Y. Radiation condition and scattering problem for time-harmonic acoustic waves in a stratified medium with a non-stratified inhomogeneity [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1995, 54: 9 – 29.

[18] LEVITAN B. Inverse Sturm-Liouville problems [M]. Utrecht: VNU Sciences Press, 1987.

[19] ABRAMOWITZ M, STEGUN I. Handbook of mathematical functions [M]. New York: Dover, 1972.

[20] MAGNUS W, OBERHETTINGER F, SONI R. Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics [M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1966.

[21] OLVER F. Asymptotics and special functions [M]. New York: Academic Press, 1974.